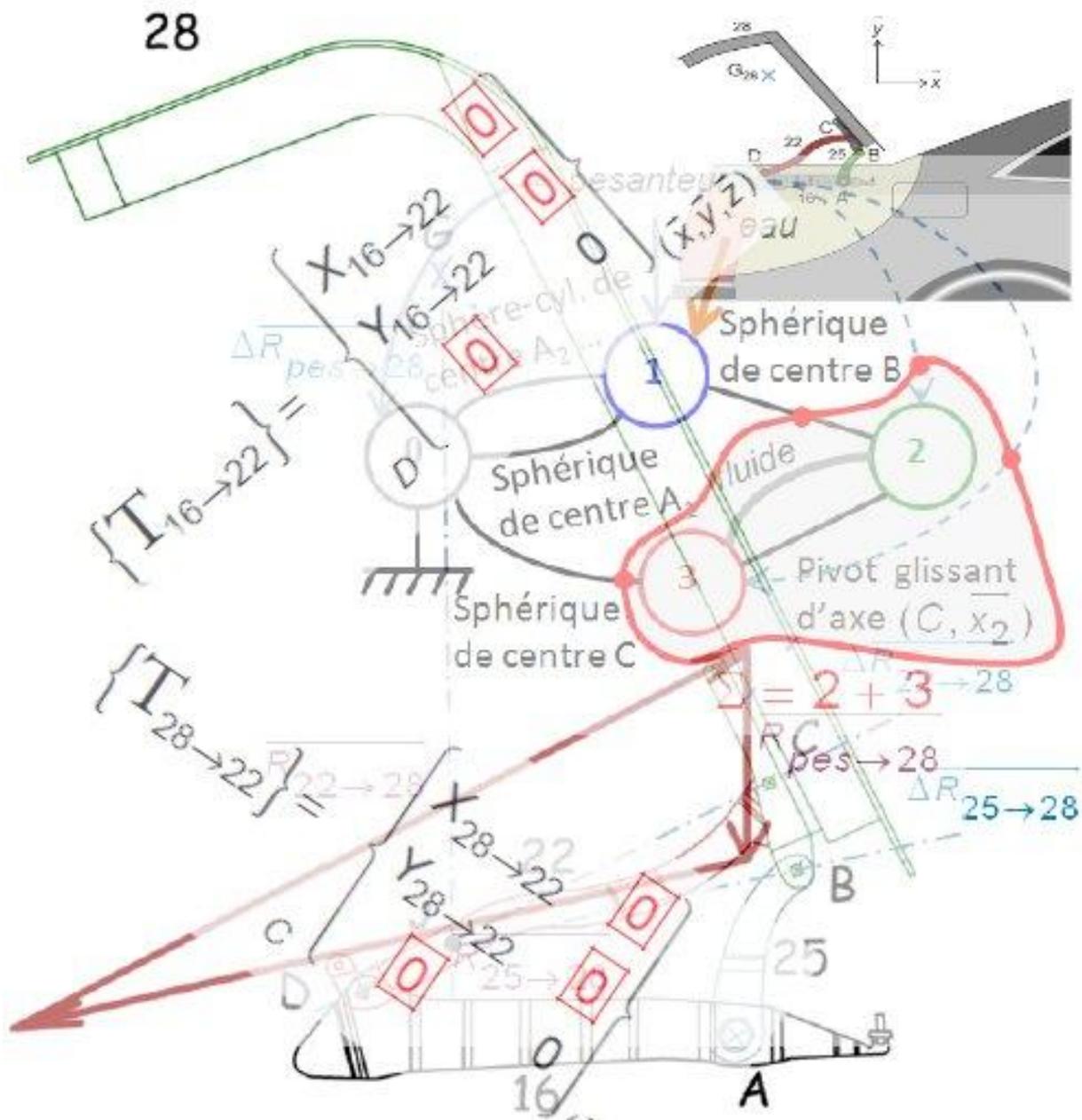


# Équilibre d'un solide



**Objectif :**

Déterminer les efforts mis en jeu pour immobiliser un solide.

## Sommaire

1 - Objectifs .....	3
2 - Généralités sur la notion de force .....	3
3 -Les quatre directions de force à connaître .....	3
3.1 - La pesanteur .....	4
3.2 - Les forces de contact .....	4
3.3 - Solide soumis à 2 forces .....	5
3.2 - Solide soumis à 3 forces .....	5
4 -Lorsqu'une force provoque une rotation .....	5
4.1 - Notion de moment .....	5 - 6
4.2 - Cas où le moment est nul .....	7
4.3 - Notion de moment résultant .....	7
5- Principe Fondamental de la dynamique .....	7-8
5.1 - Convention d'écriture d'une force .....	9
5.2 -Bilan des forces extérieures .....	9
5.3 -Notion de système extérieur et isolé .....	10-11
6- Construction d'une résultante .....	11-12

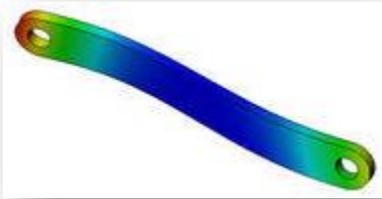
## 1-Objectif :

La statique, c'est l'étude des solides en l'équilibre, au repos, immobile. L'objectif de ce chapitre est de déterminer (à partir d'une action connue comme l'effort souhaité sur un contact, la pesanteur,...) les autres efforts exercés au sein du mécanisme. Ces efforts déterminés permettront en résistance des matériaux de choisir la matière appropriée et les dimensions de la pièce mais aussi :

- Les éléments constituants (coussinet, roulement, ressort, ...)
- Les actionneurs comme les vérins ou les moteurs.

## 2-Généralités sur la notion de force ou d'action mécanique.

On appelle action mécanique, toute cause capable de :



- Déformer un solide (Résistance des matériaux)



- Créer un mouvement (Dynamique)



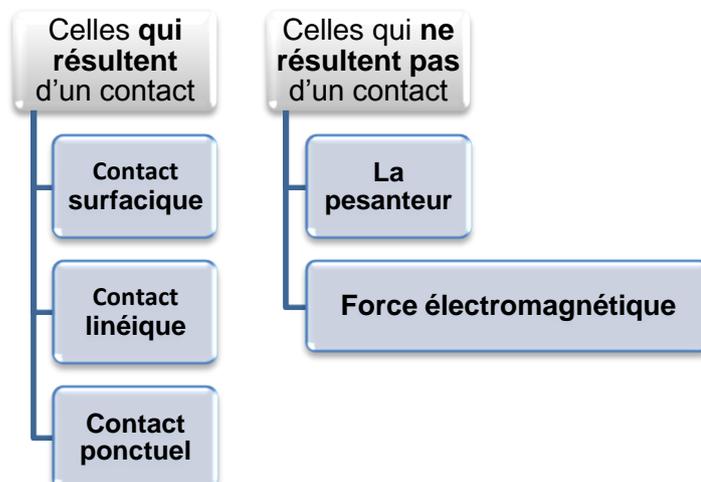
- Interdire un mouvement (Statique)

Les actions mécaniques représentent des efforts réels entre solides réels.

Lorsqu'une action mécanique provoque, (ou peut provoquer) sur un solide, un mouvement de **TRANSLATION**, elle définit la **FORCE**.

## 3-Les quatre directions de base à connaître

Elles sont de deux types :



### 3.1) La pesanteur

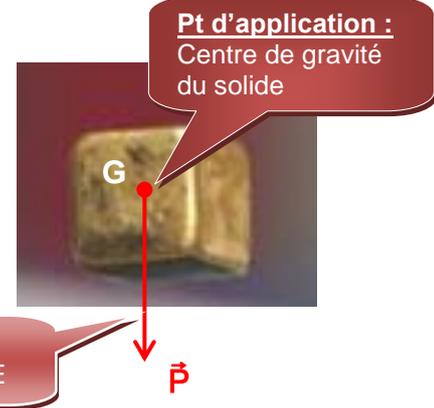
Chaque solide possède sa masse propre, elle est soumise à l'attraction de la terre et répond à la loi suivante :

$$P = M \cdot g$$

**P** : poids en Newton

**M** : Masse en kg

**g** : Accélération de la pesanteur  $m/s^2$



### 3.2) Les forces de contact

Que la nature du contact se résume à une surface, une ligne ou à un point, un seul résultat :

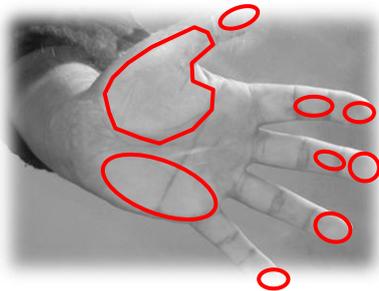
- **Le contact est une surface :**

$$F = p \cdot S$$

**S** : surface de contact en  $m^2$

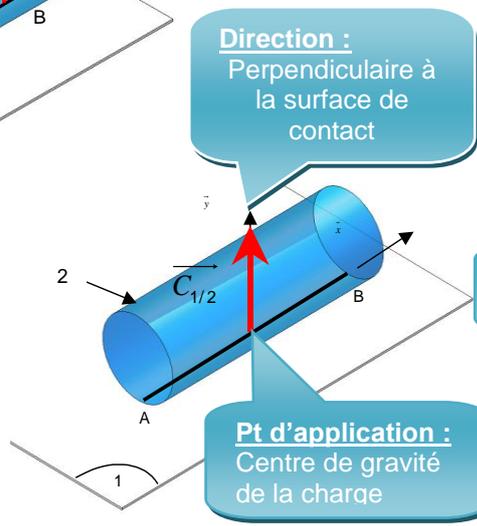
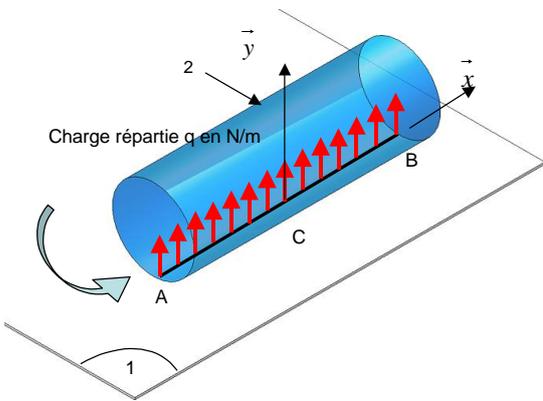
**F** : effort en Newton, perpendiculaire à la surface de contact

**p** : pression en pascal (Pa)

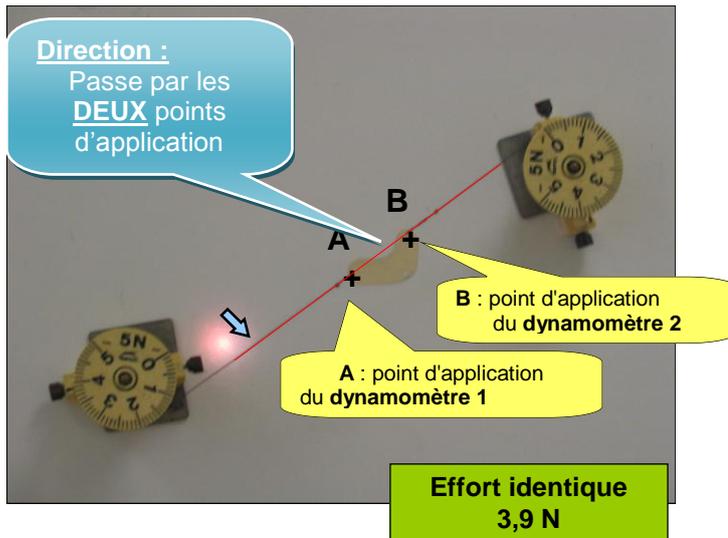


**Unités de pression :**  
 $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ daN/cm}^2 = 10 \text{ N/cm}^2$

- **Le contact est une ligne ou un point :**



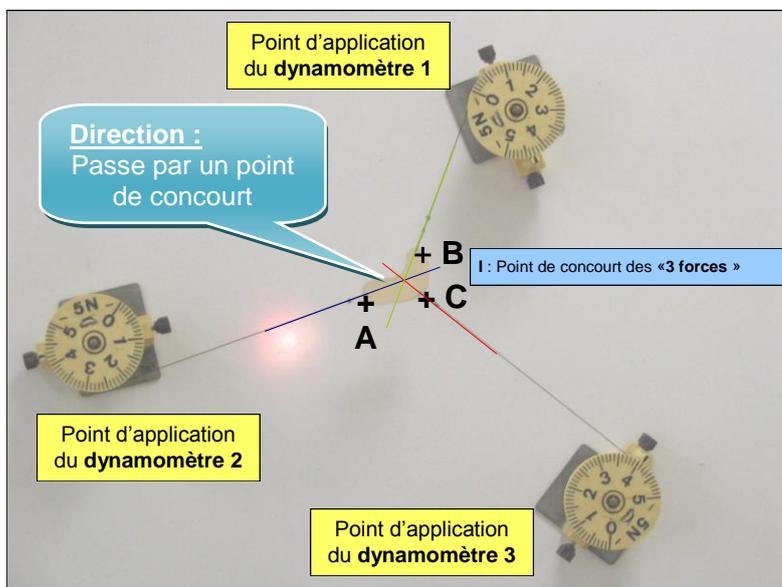
### 3.3) Solides soumis à DEUX forces



Lorsqu'un solide est soumis à deux forces, les directions **de ces deux forces passent par leur point d'application respectif ici la droite AB.**

- ⇒ Point d'application : A et B
- ⇒ Direction ou support : la droite AB
- ⇒ Sens : Opposé
- ⇒ Norme, intensité : égale

### 3.4) Solides soumis à TROIS forces



Lorsqu'un solide est soumis à trois forces, les directions **des trois forces se coupent en un même point ici le point I**

- ⇒ Point d'application : A, B et C
- ⇒ Direction ou support : passe par point de concourt I
- ⇒ Sens
- ⇒ Norme, intensité

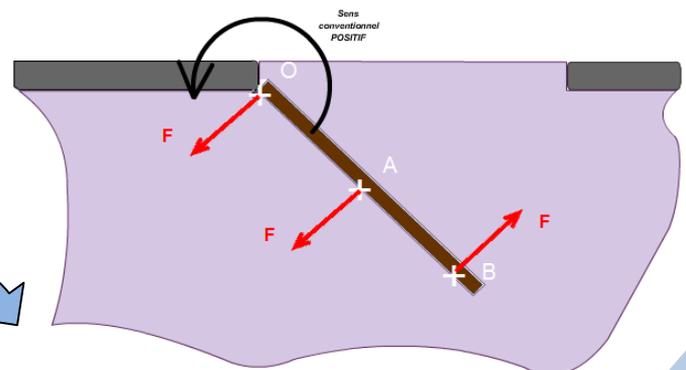
## 4-Lorsqu'une force provoque une rotation

*flash*

### 4.1) Notion de Moment, de couple.

Le moment ou le couple est cet effort en rotation qu'il faut produire au niveau du gon de la porte pour créer le mouvement de celle-ci, il se schématise de deux manières :

- par une double flèche droite
- par une double flèche circulaire

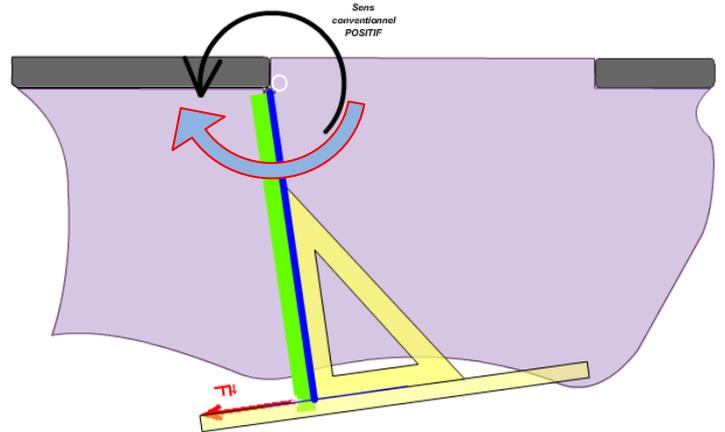


Il se schématise toujours sur **l'axe de rotation**  
Ou **autour de l'axe de rotation**

Le moment est égal au produit de la **distance** par l'**intensité** de la **force**, il vous appartient de définir le **signe**.

$$\vec{M}_A \vec{F} = \pm d \cdot \|\vec{F}\|$$

**Particularité :** la distance correspond à la longueur de la perpendiculaire entre la **direction** ou le **support de la force** et l'axe de **rotation**.



- Objectif :

Je dois faire un peu d'exercice pour rester en forme ! Pour cela je dois être capable de soulever des altères de 10kg et donc ... vous devez déterminer le couple du moteur capable de le faire, celui-ci sera implanté au niveau de l'articulation de mon épaule.  
Bonne recherche !

- Données :

OG = 700 mm

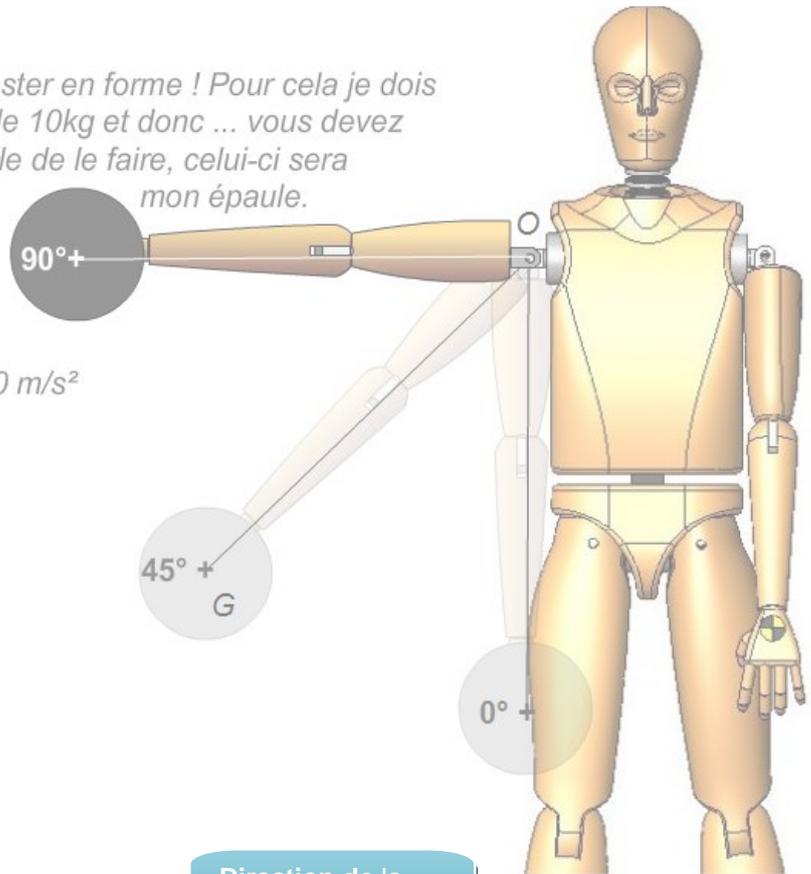
Accélération de la pesanteur  $g=10 \text{ m/s}^2$

- Calculer le poids P de l'altère .

P =  N

- D'après vous pour quelle position du bras le moment au niveau de l'articulation de l'épaule sera le plus important ?

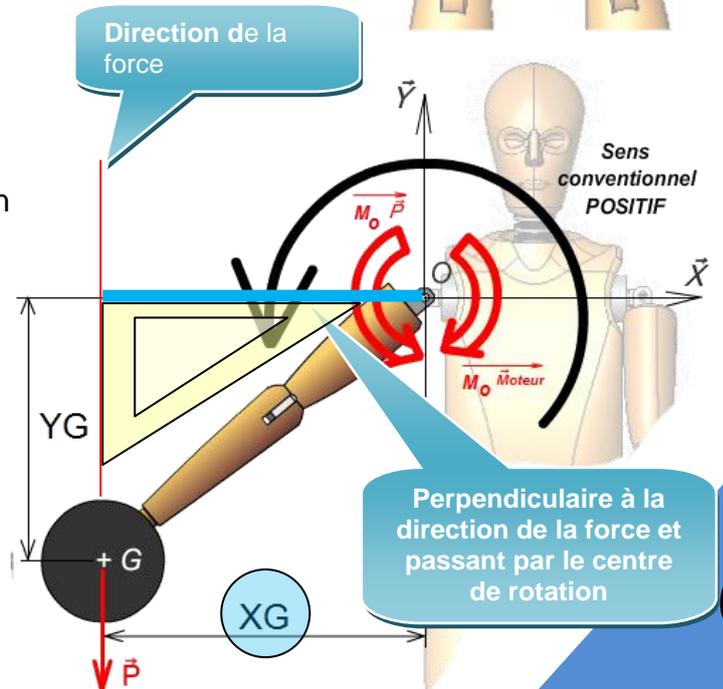
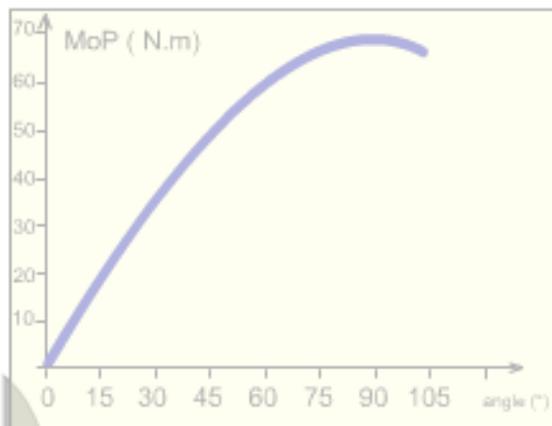
$\alpha =$   °   
Correct



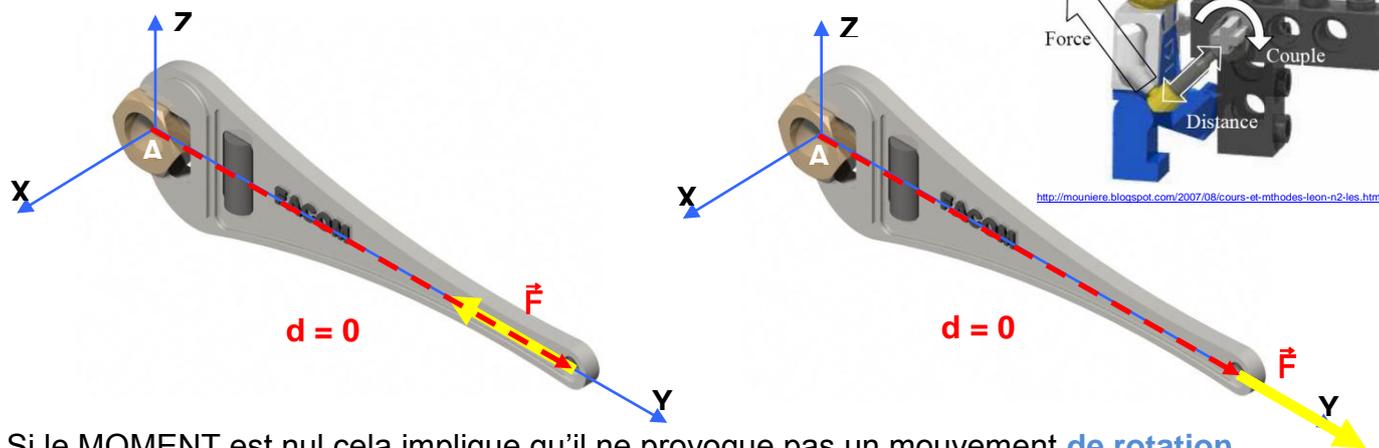
-Formule littérale du calcul du moment :

$$M_o \vec{P} = + XG \cdot P = 70 \text{ N.m (bras à l'horizontale)}$$

- Évolution du moment en fonction de la position du bras :



**4.2) Cas où le moment est nul.**



Si le MOMENT est nul cela implique qu'il ne provoque pas un mouvement **de rotation**.

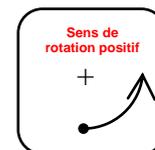
**4.3) Notion de moment résultant.**

Le moment résultant en un point A quelconque de plusieurs forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  est égal à la somme vectorielle des moments en A de chacune des forces. Ce vecteur appelé moment résultant en A est égal à :

$$M_A \vec{R} = \pm M_A \vec{F}_1 \pm M_A \vec{F}_2 \pm \dots \pm M_A \vec{F}_n$$

**- Remarque :**

Le résultat du calcul du moment résultant peut être **nul, positif ou négatif**, dans ce cas il traduit le comportement du solide :



**5-Principe Fondamental de la Dynamique.**

Vers la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, et après des siècles d'études et de réflexion, NEWTON élabore le **principe fondamental de la dynamique** qui sera la clef de voûte de la mécanique classique.

Ce principe permet d'expliquer et de prévoir les relations qui existent entre les efforts appliqués à un système et ses mouvements.

Cet outil permet donc de mettre en relation des notions telles que accélération, inertie, efforts et pourquoi pas la notion de vibrations.

Dans un référentiel galiléen  $R_g$ , le torseur des actions mécaniques appliquées sur le solide  $S$  est égal au torseur dynamique de ce solide dans son mouvement par rapport à  $R_g$ .

Exprimons ces torseurs en un point  $G$ :

$$\sum \{F_{ext} \rightarrow S\} = \{D_{S/R_g}\}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique permet donc d'écrire les 2 relations vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext/s} &= m \cdot \vec{a} \\ \sum M_G \vec{F}_{ext/s} &= I_{Gz} \cdot \alpha \end{aligned}$$

Avec  $G$  le centre de gravité du solide et  $z$  l'axe de rotation.

$\alpha$  : Accélération angulaire en  $rad/s^2$   
 $a$  : Accélération linéaire en  $m/s^2$   
 $I_{Gz}$  : Moment d'inertie autour de l'axe  $G\vec{z}$  en  $kg.m^2$   
 $m$  : masse en  $kg$

**Personnalisé au mouvement de :**

**TRANSLATION** cela donne :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext/s} &= m \cdot \vec{a} \quad (1) \\ \sum M_G \vec{F}_{ext/s} &= \vec{0} \quad (2) \end{aligned}$$

- Car l'accélération angulaire  $\omega'$  ou  $\alpha$  nulle.

**ROTATION** cela donne :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext/s} &= \vec{0} \quad (1) \\ \sum M_G \vec{F}_{ext/s} &= I_{Gz} \cdot \alpha \quad (2) \end{aligned}$$

- Car une l'accélération  $a$  est nulle.

Pour le cas d'un solide immobile ou se déplaçant à vitesse constante cela se traduit par le **P.F.S** :

- le système est au repos donc les accélérations  $a$  et  $\omega'$  ou  $\alpha$  sont nulles.
- le système se déplace à vitesse constante donc ses dérivées sont nulles.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext/s} &= \vec{0} \\ \sum M_G \vec{F}_{ext/s} &= \vec{0} \end{aligned}$$

**Domaine de la Statique**

**Domaine de la Dynamique**

Le cas qui nous intéresse dans ce chapitre est celui de la statique. La statique permet de déterminer les efforts qui permettent de maintenir un solide au repos ou en équilibre.

Le repos ou l'équilibre sous-entend l'absence du **mouvement de translation** comme celui du **mouvement de rotation** (dans notre cas).

L'immobilisation du solide en **Translation** se traduit par une **résultante nulle**.

L'immobilisation du solide en **Rotation** se traduit par un **moment résultant nul**.

Si un système matériel (**S**) est en équilibre par rapport à un repère fixe  $\mathcal{R}$  (0, x, y, z), les actions mécaniques extérieures appliquées à (**S**) vérifient **simultanément** les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_{\text{ext}/\text{syst.}} = \vec{0} \\ \Sigma M_H \vec{F}_{\text{ext}/\text{syst.}} = \vec{0} \end{cases}$$

**5.1) Convention d'écriture d'une force.**

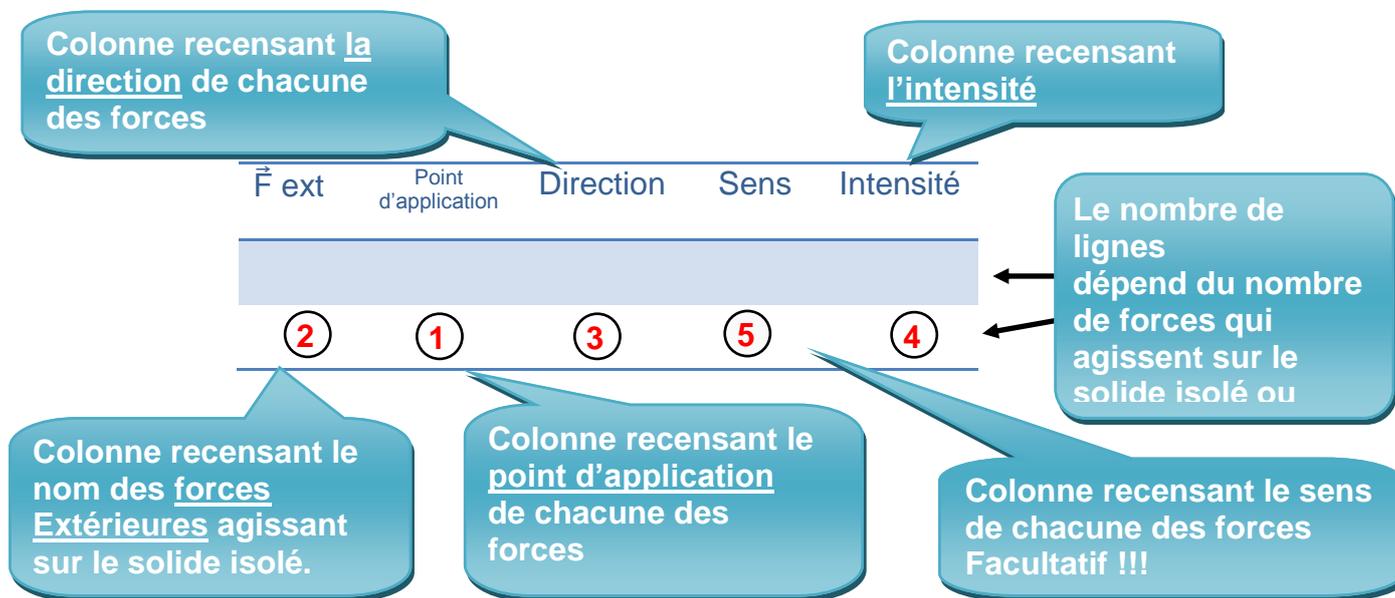
Nous utiliserons ici comme nous l'avons fait en cinématique pour les vitesses une **notation particulière**. La force portera toujours le même nom que **son point d'application** puis sera suivie de **deux** indices "i" et "j" qui indique le numéro des pièces en contact en ce **point**, l'ordre permet de définir quel est le système isolé et le système extérieur (Permet de fixer une frontière d'étude) :

$\vec{A}_{i/j}$  **A** : point de contact entre les 2 solides  
**i** : n° du solide extérieur en contact au point A  
**j** : n° du solide isolé en contact au point A

Attention l'ordre a son importance

**5.2) Bilan des forces extérieures.**

L'inventaire des forces agissant sur le ou les pièce(s) isolée(s) se fait au travers d'un tableau recensant un grand nombre d'informations :



**5.3) Notion de système extérieur et système isolé.**

Le fait d'ISOLER une ou plusieurs pièces mécaniques permet tout d'abord de fixer une frontière d'étude et de mettre en évidence des points de contact entre les solides. Ces points de contact permettront de définir le nombre de forces agissant sur ce solide et donc plus tard l'intensité de chaque force.

- 1 contact : 1 force
- 2 contacts : 2 forces .....

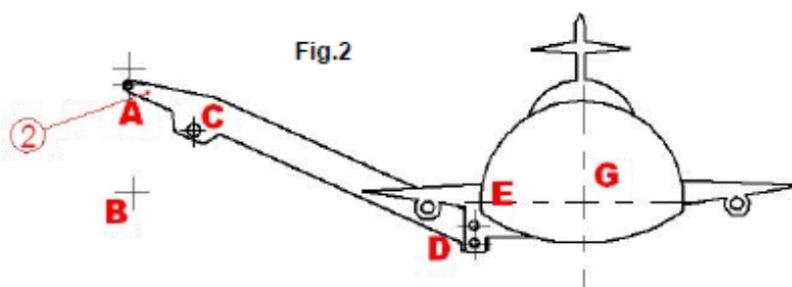
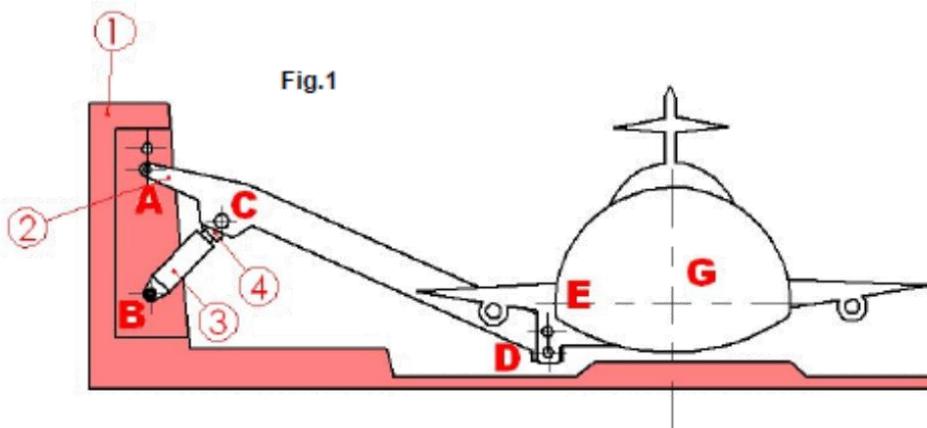
Exemple : Fig.1 solide isolé 1

Fig.2 solide isolé 2

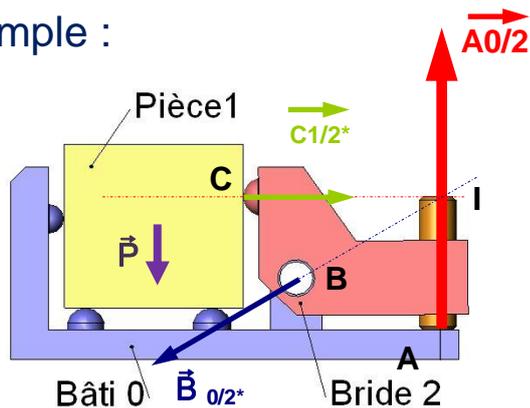
Le système extérieur est constitué par **les solides en contact avec le système isolé mais n'appartenant pas à la frontière d'étude**.

Il existe deux possibilités d'isoler une ou des pièces, la première est de **colorier** la pièce ou les pièces à étudier, la seconde est de **dessiner seule** la pièce ou les pièces à étudier en respectant la position exacte qu'elle occupe au sein du mécanisme.

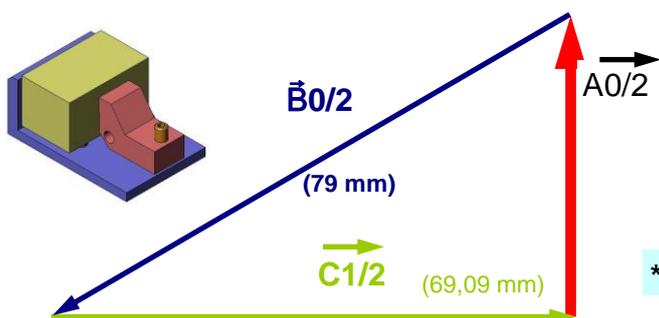
L'isolement d'une ou de ces plusieurs pièces, définit dans un premier temps une **frontière d'étude**, ce qui nous permettra de mettre en évidence au gré des différents choix d'isollements certaines forces.



Exemple :



Echelle des forces : 1 mm = 1 daN



Le système ci-contre permet d'immobiliser une pièce ① à l'intérieur d'un montage d'usinage de façon à la percer. Déterminer graphiquement les efforts en B et C de façon à dimensionner l'axe en B.

Colorier sur la figure en rose, la pièce isolée ②.

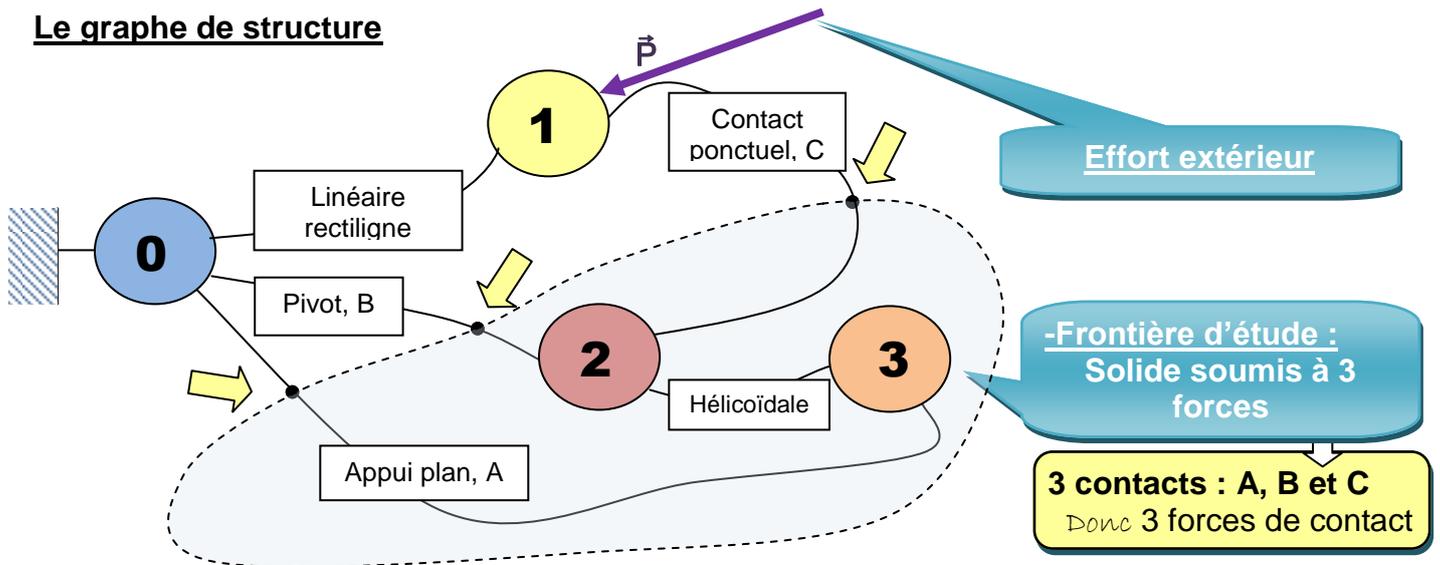
$\vec{F} \text{ EXT}$	Point d'appli.	Direction	Intensité
$\vec{A} 0/2$	A	$\perp$ à la surf. de contact	40 daN
$\vec{B} 0/2$	B	? <b>BI</b>	<b>79 daN</b>
$\vec{C} 1/2$	C	$\perp$ à la surf. de contact	<b>69,09 daN</b>

- P.F.S :

$$\vec{B}0/2 + \vec{A}0/2 + \vec{C}1/2 = \vec{0}$$

$$M_I \vec{B}0/2 + M_I \vec{A}0/2 + M_I \vec{C}1/2 = \vec{0}$$

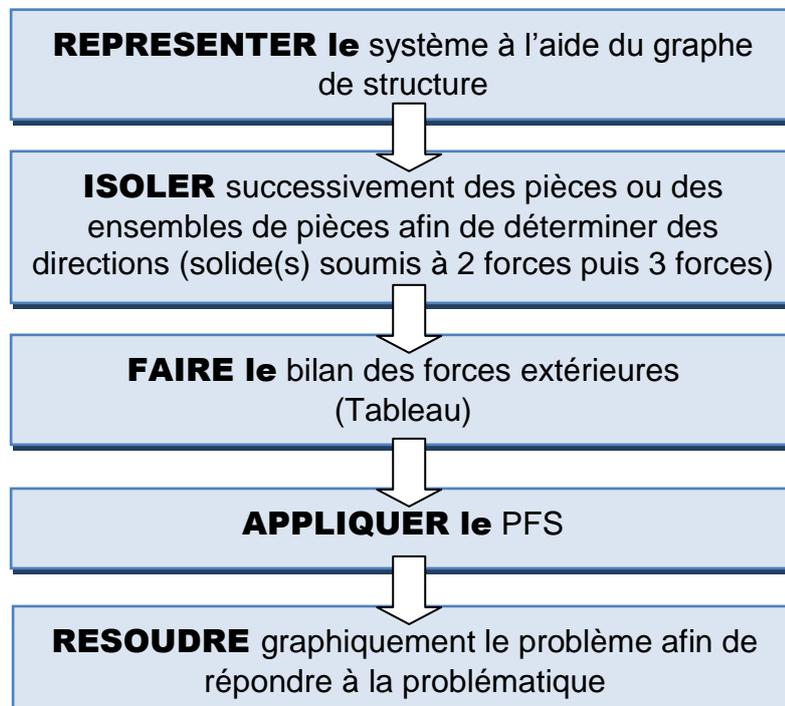
\* : vecteur représenté sans échelle

Le graphe de structure

Sur le graphe de structure figure :

- Toutes les liaisons élémentaires
- Les actions mécaniques extérieures agissant sur le système (pesanteur, effort extérieur,...)
- Le nombre d'inconnues de liaison pour chaque liaison dans le cas d'une étude analytique.

La démarche utilisée pour résoudre une problématique liée à la détermination d'actions mécaniques sur un système en équilibre, peut se résumer à :



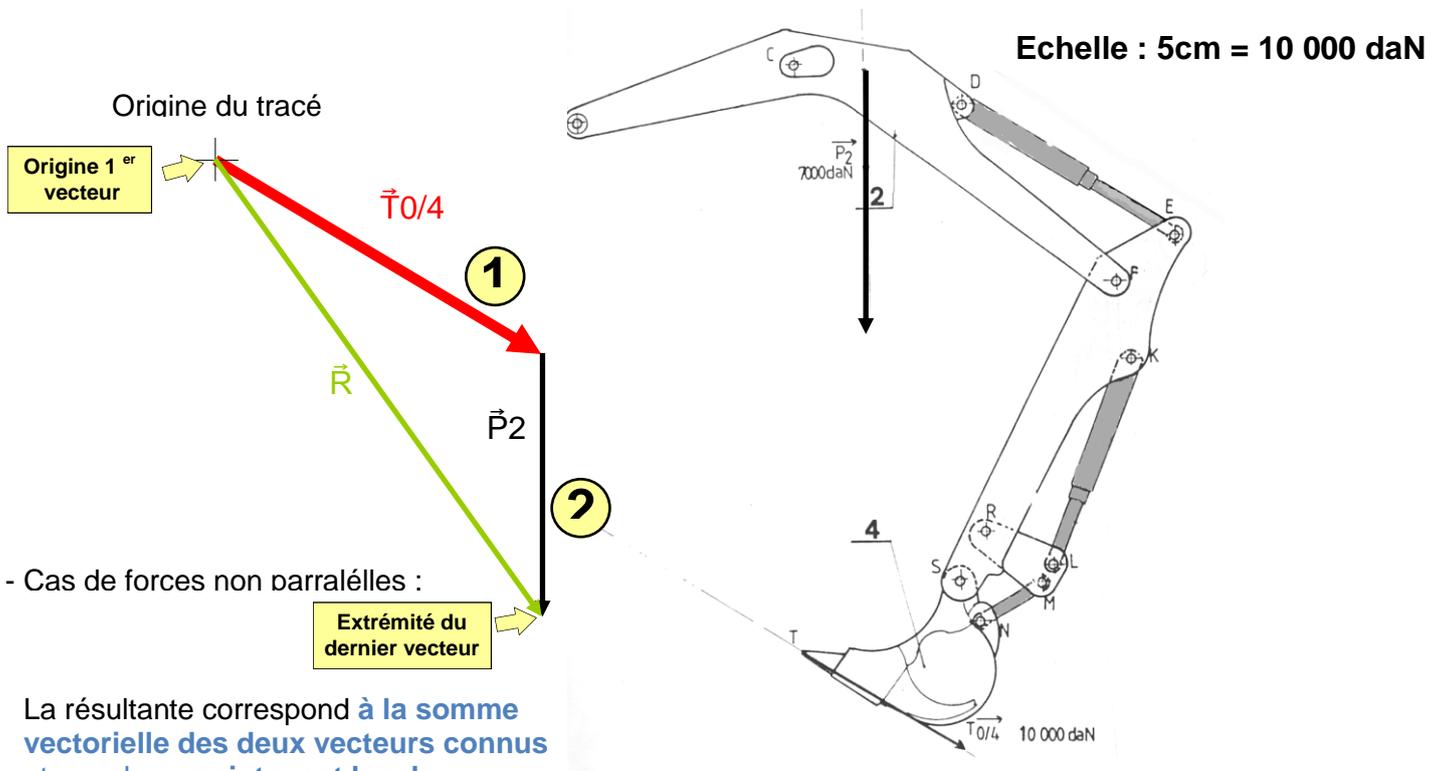
## 6) Construction d'une résultante.

### 6.1) Résultante de deux forces.

Les deux forces représentées sont totalement définies. L'objectif est de remplacer ces

deux forces par une seule.

- Déterminer graphiquement la résultante :  $\vec{R} = T_{O/4} + P_2$



- Cas de forces non parallèles :

La résultante correspond à la **somme vectorielle des deux vecteurs connus** et remplace maintenant les deux vecteurs pour la suite du problème.

**- Méthode -**

1 - Définir le point d'application de la résultante : C'est le point d'intersection des deux directions ici nous le nommerons R.

2 - Construire la résultante : Tracer à la suite du premier vecteur  $\vec{T}_{O/4}$ , le vecteur  $\vec{P}_2$ , la résultante a pour origine l'origine de  $\vec{T}_{O/4}$  et pour extrémité, l'extrémité de  $\vec{P}_2$ .

3 - Reporter à l'échelle la résultante en son point d'application:

longueur 7,43 cm soit  $7,43 \times 10\ 000 / 5$

$R = 14\ 860$  daN  
Et non pas  
 ~~$10\ 000 + 7\ 000 = 17\ 000$  daN~~

